联赛二试 · CMO 代数进阶

精选五讲

全册导读

本册从一条主线出发**——复数与三角互为表里**：欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 把”角”变成单位圆上的复数，而 $z+z^{-1}=2\cos\theta$ 又把三角塌缩成代数。沿这条线，前三讲把它用到解方程、解递推、判定三角值的代数本性；第四讲转向它的几何化身；第五讲收尾于一门独立的硬技巧。五讲按逻辑递进编排：

讲次	主题	核心工具	代表题型
一	Chebyshev 与三角法解方程	$x=2\cos\theta$、T_n、De Moivre	三角法解三次 / 高次方程
二	换元法解非线性与分式递推	a^2-2、复不动点、tan 代换	求递推通项、判周期
三	代数整数与极小多项式	“有理的代数整数必为整数”	$\cos\frac{2\pi}{n}$ 的极小多项式、无理性
四	复数与平面几何	旋转 $z\mapsto p+e^{i\theta}(z-p)$	正三角形判据、Ptolemy
五	Vieta jumping 与二次型递降	二次方程”跳根”+ 无穷递降	丢番图整除题

逻辑脉络：第一讲立起 $x=2\cos\theta$ 与 Chebyshev 这套工具并用它解方程；第二讲用同一种换元思想去解递推；第三讲深挖”为什么 $\cos\frac{2\pi}{n}$ 这些值满足整系数方程”（代数整数、极小多项式），正是第一讲 Chebyshev 结构的延伸；第四讲转到复数的几何用法；第五讲独立成章，讲 Vieta 跳跃与无穷递降。

> **阅读约定** T_n,U_n 记第一、二类 Chebyshev 多项式（$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$）。$\zeta_n=e^{2\pi i/n}$ 为 n 次本原单位根。$\lfloor\cdot\rfloor$ 取整。星号 $(\star)$ 标注更难、达 CMO 压轴档的题。

第一讲　Chebyshev 多项式与三角法解方程

许多三次、高次方程在实数里”看不出根”，根式还要开复数（卡尔达诺的不可约情形）。但只要系数”眼熟”，一个代换 $x=2\cos\theta$ 就能让方程塌缩成一句倍角等式。

本讲先把复数与三角的桥、Chebyshev 多项式立起来——它们也是后两讲的地基——再用来解方程。

1.1 理论

(一) De Moivre 与复数–三角桥 欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 给出 De Moivre 公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

二项展开后取实部、虚部，便把 $\cos n\theta,\sin n\theta$ 写成 $\cos\theta,\sin\theta$ 的多项式。

(二) $z+z^{-1}$ 装置与 Chebyshev 多项式 取 $z=e^{i\theta}$，则 $z^k+z^{-k}=2\cos k\theta$。由

$$(z+z^{-1})(z^k+z^{-k})=\left(z^{k+1}+z^{-(k+1)}\right)+\left(z^{k-1}+z^{-(k-1)}\right)$$

知 z^k+z^{-k} 是 $z+z^{-1}$ 的**首一整系数多项式**。据此定义第一类 Chebyshev 多项式 T_n，使 $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$：

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\qquad T_0=1,\ T_1=x;$$

$$T_2=2x^2-1,\quad T_3=4x^3-3x,\quad T_4=8x^4-8x^2+1,\quad T_5=16x^5-20x^3+5x.$$

它的根为 $\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$（$k=1,\dots,n$），并有漂亮的复合性质 $T_m\left(T_n(x)\right)=T_{mn}(x)$。若改记 $x=2\cos\theta$，则 $2\cos n\theta$ 同样是 x 的首一整系数多项式（即 $2T_n(x/2)$）——这一点是第三讲"代数整数"的种子。

(三) 解方程的原理 若多项式方程能配成 $T_n(x)=$ 常数（用 $x=\cos\theta$），或配成 x^3-3x、x^2-2 这类"$x+x^{-1}$ 型"（用 $x=2\cos\theta$），就化为**倍角方程** $\cos n\theta=$ 常数，从而一次读出全部实根。

> **心法** 看到 x^3-3x、x^2-2、$4x^3-3x$、$8x^4-8x^2+1$ 这种"系数眼熟"的多项式，立刻试 $x=2\cos\theta$ 或 $x=\cos\theta$：右端塌缩成单一余弦，方程随即变成"cos 的某倍角 = 常数"。**求根问题就此化为读角问题。**

1.2 例题

例 1.1（三角法解三次方程 · 不可约情形） 设 $|c|\le 2$。解 $x^3-3x=c$。

解. 令 $x=2\cos\theta$。则

$$x^3-3x=8\cos^3\theta-6\cos\theta=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=2\cos 3\theta,$$

故 $x^3-3x=c\Leftrightarrow\cos 3\theta=\frac{c}{2}$。因 $|c|\le 2$，取 $\theta_0=\frac{1}{3}\arccos\frac{c}{2}$，则 3θ 可取 $3\theta_0,3\theta_0+2\pi,3\theta_0+4\pi$，给出三个实根

$$\boxed{x_k=2\cos\left(\theta_0+\frac{2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.}$$

这正是 Cardano 公式在判别式为负（三实根的"不可约情形"，根式须开复数）下，用三角函数表实根的标准做法。一般的 $y^3+py+q=0$（$p<0$）先线性放缩 $y=\lambda t$（取 $\lambda=\sqrt{-p/3}$）即化为 $t^3-3t=$ 常数。■

例 1.2（求三次方程的全部实根） 求 $8x^3-6x-1=0$ 的三个实根。

解. 两边除以 2：$4x^3-3x=\frac{1}{2}$。由 $4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos3\theta$，令 $x=\cos\theta$ 得 $\cos3\theta=\frac{1}{2}$，即 $3\theta=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$。在 $[0,\pi]$ 内得 $\theta=\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{9},\frac{7\pi}{9}$，故

$$\boxed{x=\cos\frac{\pi}{9},\ \cos\frac{5\pi}{9},\ \cos\frac{7\pi}{9}.}$$

（核验 Vieta：三根之和 $=0$、两两积之和 $=-\frac{3}{4}$、积 $=\frac{1}{8}$，与 $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0$ 一致。）■

例 1.3（用 T_5 求 $\cos36°$） 求 $\cos36°$ 的精确值。

解. 设 $x=\cos36°$。由 $T_5(x)=16x^5-20x^3+5x=\cos(5\cdot36°)=\cos180°=-1$，得

$$16x^5-20x^3+5x+1=0.$$

$x=-1$ 是一根，提取因式 $(x+1)(16x^4-16x^3-4x^2+4x+1)=0$，而 $16x^4-16x^3-4x^2+4x+1=(4x^2-2x-1)^2$。因 $\cos36°>0$，取 $4x^2-2x-1=0$ 的正根：

$$\cos36°=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

这已预示第三讲的主题——$\cos\frac{2\pi}{n}$ 总满足一个整系数方程。■

1.3 练习（答案见本讲末）

练习 1.1 解 $x^3-3x=1$ 的三个实根。

练习 1.2 求 $\cos72°$ 的精确值。

练习 1.3 ($\star$) 设 $\zeta=e^{2\pi i/7}$。证明 $\cos\frac{2\pi}{7},\cos\frac{4\pi}{7},\cos\frac{6\pi}{7}$ 是 $8x^3+4x^2-4x-1=0$ 的三根，并求 $\sec\frac{2\pi}{7}+\sec\frac{4\pi}{7}+\sec\frac{6\pi}{7}$。

第一讲练习答案

1.1 令 $x=2\cos\theta$：$2\cos3\theta=1$，$\cos3\theta=\frac{1}{2}$，$3\theta=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$，在 $[0,\pi]$ 内 $\theta=\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{9},\frac{7\pi}{9}$。故三根为 $2\cos\frac{\pi}{9}$，$2\cos\frac{5\pi}{9}$，$2\cos\frac{7\pi}{9}$。

1.2 设 $x=\cos 72°=\cos\frac{2\pi}{5}$。由 $T_5(x)=\cos(5\cdot 72°)=\cos 360°=1$ 得 $16x^5-20x^3+5x-1=0$，$x=1$ 是一根，$(x-1)(4x^2+2x-1)^2=0$。取 $4x^2+2x-1=0$ 的正根：$\cos 72°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$。

1.3 由 $1+\zeta+\cdots+\zeta^6=0$ 除以 ζ^3 得 $\sum_{k=1}^{3}(\zeta^k+\zeta^{-k})+1=0$，即 $c_1+c_2+c_3=-1$，其中 $c_k=2\cos\frac{2k\pi}{7}$。用 $c_2=c_1^2-2$, $c_3=c_1^3-3c_1$ 代入：$c_1^3+c_1^2-2c_1-1=0$；令 $c_1=2x$ 即 $8x^3+4x^2-4x-1=0$，三个余弦同时满足。又 c_1,c_2,c_3 是 $y^3+y^2-2y-1=0$ 的根，故 $e_1=-1$, $e_2=-2$, $e_3=1$，于是

$$\sec 2\pi/7+\sec 4\pi/7+\sec 6\pi/7=\sum_{k=1}^{3}\frac{2}{c_k}=2\cdot\frac{e_2}{e_3}=2\cdot\frac{-2}{1}=-4.$$

第二讲　换元法解非线性与分式递推

第一讲用 $x=2\cos\theta$ 把方程塌缩成倍角等式；同一招也能驯服递推：找一个代换 $a_n=\phi(\theta_n)$，让非线性或分式的递推变成 θ_n 的**线性**递推。两类最常见——**倍乘型**（角倍增，给 2^n 型封闭式）与**分式型**（角平移，给周期或收敛）。

2.1　理论

(一) 倍乘型：角倍增 代换字典：

递推右端	代换	效果
a^2-2	$a=x+x^{-1}$	$x\mapsto x^2$（指数翻倍）
$2a^2-1$	$a=\cos\theta$	$\theta\mapsto 2\theta$
$\frac{2a}{1-a^2}$	$a=\tan\theta$	$\theta\mapsto 2\theta$

代换后角（或指数）每步翻倍，故 $\theta_n=2^{n-1}\theta_1$，封闭式带 2^{n-1} 次幂。

(二) 分式型：Möbius 递推的线性化 记 $M(a)=\frac{\alpha a+\beta}{\gamma a+\delta}$（$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$），则 $a_n=M^{n-1}(a_1)$。三个关键事实把它彻底解清楚：

① **复合即矩阵相乘。** M 对应矩阵 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$（相差非零数倍不影响 M），且 $M_1\circ M_2$ 对应矩阵之积。于是迭代 M^n 对应矩阵的 n 次幂——分式递推本质是**线性的**，只是写在了"射影坐标"里。

② **不动点把它对角化。** 不动点满足 $x=M(x)$，即 $\gamma x^2+(\delta-\alpha)x-\beta=0$，记两根 x_1,x_2（即矩阵的两个特征方向）。作**共轭变换**

$$w = \frac{a - x_1}{a - x_2} \qquad (\text{把 } x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto \infty),$$

则 M 在 w 坐标下变成**纯乘法** $w \mapsto k\,w$，其中 $k = \frac{\alpha - \gamma x_1}{\alpha - \gamma x_2}$（恰为两特征值之比）。因此一步到位：

$$\frac{a_n - x_1}{a_n - x_2} = k^{n-1} \cdot \frac{a_1 - x_1}{a_1 - x_2}.$$

③ k 的模决定命运。

- **两实不动点**（判别式 > 0）：一般 $|k| \neq 1$，$k^{n-1} \to 0$（或 ∞），故 $w_n \to 0$（或 ∞），即 a_n **收敛**到吸引不动点；收敛是几何速率 $|k|^n$。
- **共轭复不动点**（判别式 < 0，此时 $x_2 = \bar{x}_1$）：因 α, γ 为实数，$k = \frac{\alpha - \gamma x_1}{\overline{\alpha - \gamma x_1}}$ 形如 $z/\bar{z}$，故 $|k| = 1$，$k = e^{i\psi}$。数列在 w 坐标里沿单位圆匀速旋转，**有界不收敛**；若 $\psi = 2\pi \cdot \frac{p}{q}$（最简分数）则 $k^q = 1$，**周期为** q。
- **重不动点**（判别式 $= 0$）：w 坐标下是平移，a_n 仍收敛到唯一不动点（次线性）。

④ 三角捷径。 不动点为 $\pm i$ 时，上面的 w 正是 $a = \tan\theta$：直接验证 $\frac{a-i}{a+i} = -e^{2i\theta}$。于是凡能配成 $\tan(\theta \pm \varphi)$ 的和角形式，每步 θ 平移 $\pm\varphi$，$k = e^{\pm 2i\varphi}$，周期 $= \frac{\pi}{\varphi}$（约简）——这与复不动点法殊途同归。

> **心法** 非线性递推先问"右端是不是某个倍角 / 平方公式"——是就配 $x + x^{-1}$、cos 或 tan 代换，把迭代变成指标的**翻倍**；分式递推一律先解不动点二次方程，再用 $w = \frac{a - x_1}{a - x_2}$ 把它**线性化成"每步乘** k"：$|k| \neq 1$ 收敛、$|k| = 1$ 周期（周期由 k 的辐角定）。代换后务必回查定义域。

2.2 例题

例 2.1（倍乘型 · 与 Lucas 数相通） 设 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2$。求 a_n。

解. 令 $a_n = x_n + x_n^{-1}$。由 $a^2 - 2 = (x + x^{-1})^2 - 2 = x^2 + x^{-2}$ 知 $x_{n+1} = x_n^2$，故 $x_n = x_1^{2^{n-1}}$。由 $x_1 + x_1^{-1} = 3$ 得 $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$，于是

$$a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^{n-1}} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2^{n-1}}.$$

又 $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \varphi^2$（$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 为黄金比），故 $a_n = \varphi^{2^n} + \varphi^{-2^n} = L_{2^n}$（第 2^n 个 Lucas 数）：$3, 7, 47, 2207, \dots$。■

例 2.2（倍乘型 · 嵌套根式与逼近速率） 求 $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k\text{ 个根号}}$ 之值、$k\to\infty$ 的极限及其逼近速率。

解. 设 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，所求为 a_k。代换 $a_n=2\cos\theta_n$：由 $\sqrt{2+2\cos\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}$（$\theta\in(0,\pi)$）得 $\theta_{n+1}=\theta_n/2$。初值 $a_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$，故 $\theta_n=\frac{\pi}{2^{n+1}}$，

$$a_k=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\overset{k\to\infty}{\rightarrow}2.$$

逼近速率：由 $2-2\cos\theta=4\sin^2\frac{\theta}{2}$，$\sqrt{2-a_k}=2\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}$，故

$$2^k\sqrt{2-a_k}=2^{k+1}\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\overset{k\to\infty}{\rightarrow}\frac{\pi}{2}\qquad(\theta=\pi/2^{k+2}),$$

即误差 $2-a_k$ 约以 $\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)^2$ 的量级趋于零。■

例 2.3（分式型 · 复不动点定周期） 求 $a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}$ 的周期。

解一（复不动点）. 不动点 $x=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x=\pm i$，共轭复根，故为周期数列。以 $\alpha=1,\beta=-1,\gamma=1,\delta=1$，

$$k=\frac{\alpha-\gamma x_1}{\alpha-\gamma x_2}=\frac{1-i}{1+i}=-i=e^{-i\pi/2},$$

辐角 $-\frac{\pi}{2}=2\pi\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$，故**周期** 4。

解二（三角）. $\frac{a-1}{a+1}=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\tan(\theta-45°)$，每步减 45°，tan 周期 180°，故周期 $180/45=4$。

验证（$a_1=2$）：$2\to\frac{1}{3}\to-\frac{1}{2}\to-3\to2$。■

例 2.4（分式型 · 用周期反求初值） 数列满足 $a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$，已知 $a_{2024}=3$。求 a_1。

解. 令 $a_n=\tan\theta_n$：$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\tan(\theta+45°)$，每步加 45°，周期 $180/45=4$，即 $a_{n+4}=a_n$。由 $2024=4\times506$，$a_{2024}=a_4$。记 $M(a)=\frac{1+a}{1-a}$，则 $a_4=M^3(a_1)$；周期 4 意味 $M^4=\mathrm{id}$，故 $M^3=M^{-1}$，反推一步：

$$a_1=M(a_4)=M(3)=\frac{1+3}{1-3}=-2.$$

验证：$-2\to-\frac{1}{3}\to\frac{1}{2}\to3$，确有 $a_4=3$。■

例 2.5（分式型 · 实不动点则收敛） 设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n+2}{a_n+1}$。求 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 及其收敛速率。

解. 不动点 $x = \frac{x+2}{x+1} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$，两个**实**不动点，故收敛。作共轭变换 $w_n = \frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}$，由 ② 得 $w_n = k^{n-1}w_1$，其中

$$k = \frac{\alpha-\gamma x_1}{\alpha-\gamma x_2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -\left(3-2\sqrt{2}\right), \qquad |k| = 3-2\sqrt{2} \approx 0.172 < 1.$$

故 $w_n \to 0$，即 $a_n \to \sqrt{2}$，且 $\left|a_n - \sqrt{2}\right|$ 以公比 $|k| = 3-2\sqrt{2}$ 几何递减。（这正是 $\sqrt{2}$ 的连分数逼近 $1, 3/2, 7/5, 17/12, \ldots$ 背后的递推。）■

2.3 练习（答案见本讲末）

练习 2.1 设 $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$，求 a_n 的封闭式。

练习 2.2 设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n^2}}$，求 a_n。（提示：$a = \tan\theta$，半角 $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\tan\theta}{1+\sec\theta}$。）

练习 2.3 求 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ 的周期。

练习 2.4 ($\star$) 设 $t = \tan\frac{\pi}{5}$, $a_{n+1} = \frac{a_n-t}{1+t\,a_n}$，求其周期，并说明为何不收敛。

练习 2.5 设 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{4a_n+2}{a_n+3}$。求 $\lim_{n\to\infty} a_n$。

第二讲练习答案

2.1 令 $a_n = x_n + x_n^{-1}$，则 $x_{n+1} = x_n^2$。由 $x_1 + x_1^{-1} = 4$ 得 $x_1 = 2+\sqrt{3}$，故 $a_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^{2^{n-1}} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2^{n-1}}$（即 $4, 14, 194, \ldots$）。

2.2 令 $a_n = \tan\theta_n$，则 $a_{n+1} = \frac{\tan\theta}{1+\sec\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$，故 $\theta_{n+1} = \theta_n/2$。$a_1 = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$，$\theta_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$，故 $a_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$。

2.3 不动点 $x = \frac{1}{1-x} \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{\pm i\pi/3}$，共轭复根。$k = \frac{x_1}{x_2} = e^{2\pi i/3}$（3 阶单位根），**周期** 3。验证（$a_1 = 2$）：$2 \to -1 \to \frac{1}{2} \to 2$。

2.4 $\frac{a-t}{1+ta} = \frac{\tan\theta - \tan 36^\circ}{1+\tan\theta\tan 36^\circ} = \tan(\theta - 36^\circ)$，每步减 36°；使 $36^\circ q$ 为 180° 整数倍的最小正整数 $q = 5$，故**周期** 5。因 $36^\circ/180^\circ = \frac{1}{5}$ 有理，数列在五个值间严格循环；非常数的周期数列必不收敛。

2.5 不动点 $x=\frac{4x+2}{x+3}\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=2,-1$，两实根。$k=\frac{\alpha-\gamma x_1}{\alpha-\gamma x_2}=\frac{4-2}{4-(-1)}=\frac{2}{5}$，$|k|<1$，故 $w_n=\frac{a_n-2}{a_n+1}\to 0$，即 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$。

第三讲　代数整数与极小多项式

第一讲反复用到一个事实：$2\cos n\theta$ 是 $2\cos\theta$ 的首一整系数多项式。它的深意是——$2\cos\frac{2\pi}{n}$ 这类数都是"代数整数"。本讲把这套语言立起来，用一条朴素引理（**有理的代数整数必为整数**）解决一批"某三角值是否有理 / 无理"的问题，核心是 Niven 定理。

3.1　理论

(一) 代数数与代数整数 复数 α 称**代数数**，若它是某非零有理系数多项式的根；若它是某**首一整系数**多项式的根，则称**代数整数**。例如 $\sqrt{2}$（根于 x^2-2）、$\zeta_n=e^{2\pi i/n}$（根于 x^n-1）都是代数整数。

(二) 极小多项式 代数数 α 的**极小多项式** $m_\alpha(x)$ 是以 α 为根、首项系数为 1 的最低次**有理系数**多项式。它唯一、**不可约**，且**整除任何以 α 为根的有理系数多项式**。$\deg m_\alpha$ 称为 α 的**次数**；α 有理 $\Leftrightarrow$ 次数为 1。

(三) 两条核心事实

- **代数整数成环**：两个代数整数之和、之积仍是代数整数（其和 / 积是各自共轭组合的对称函数，仍满足某首一整系数方程）。由此 $2\cos\frac{2\pi}{n}=\zeta_n+\zeta_n^{-1}$ 是代数整数。
- **有理的代数整数必为整数**：若 $r\in\mathbb{Q}$ 又是代数整数，则 $r\in\mathbb{Z}$。证：设 $r=\frac{p}{q}$ 既约，满足 $r^k+c_{k-1}r^{k-1}+\cdots+c_0=0$（$c_i\in\mathbb{Z}$）；乘 q^k 得 $p^k=-q(c_{k-1}p^{k-1}+\cdots+c_0q^{k-1})$，故 $q\mid p^k$，与 $\gcd(p,q)=1$ 矛盾，除非 $q=1$。

心法 要证某三角值无理：先说明它（或其 2 倍）是**代数整数**，再证它不是整数（或极小多项式次数 >1）。要证有理角的三角值取值受限：用 **Niven 定理——**把"有理"与"代数整数"对撞，逼出 $\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\}$。

3.2　例题

例 3.1（Niven 定理） 证明：若 $\theta=r\pi$（$r\in\mathbb{Q}$）且 $\cos\theta\in\mathbb{Q}$，则 $\cos\theta\in\{0,\pm1/2,\pm1\}$；并由此说明 $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$ 无理。

解. 记 $a_k=2\cos(k\theta)$。由 $2\cos\big((k+1)\theta\big)=2\cos\theta\cdot2\cos k\theta-2\cos\big((k-1)\theta\big)$，即 $a_{k+1}=a_1a_k-a_{k-1}$，配合 $a_0=2,\ a_1=2\cos\theta$，归纳知每个 a_k 是 a_1 的**首一整系数**

多项式。设 $r=\frac{p}{q}$，取 $k=q$：$a_q=2\cos(p\pi)=\pm2$，于是 $a_1=2\cos\theta$ 满足一个首一整系数方程，是**代数整数**。但 $2\cos\theta\in\mathbb{Q}$，由"有理代数整数必为整数"得 $2\cos\theta\in\mathbb{Z}$；又 $|2\cos\theta|\le 2$，故 $2\cos\theta\in\{0,\pm1,\pm2\}$，即 $\cos\theta\in\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\}$。

应用：若 $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}=r\in\mathbb{Q}$，则 $\theta=r\pi$ 有 $\cos\theta=\frac{1}{3}\notin\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\}$，矛盾。故 $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$ 无理。■

例 3.2（$\cos\frac{2\pi}{7}$ 的极小多项式与无理性） 证明 $\cos\frac{2\pi}{7}$ 无理，并说明 $\cos\frac{2\pi}{n}\in\mathbb{Q}$ 当且仅当 $n\in\{1,2,3,4,6\}$。

解. 第一讲已得 $\cos\frac{2\pi}{7}$ 满足 $8x^3+4x^2-4x-1=0$，即首一有理方程 $x^3+1/2\,x^2-1/2\,x-1/8=0$。三次多项式可约必有有理根，而由有理根定理，候选 $\pm1,\pm1/2,\pm1/4,\pm1/8$ 代入 $8x^3+4x^2-4x-1$ 均不为零，故无有理根、在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。因此 $\cos\frac{2\pi}{7}$ 的次数为 $3>1$，**无理**。

一般的 $\cos\frac{2\pi}{n}$ 是有理角的余弦，若有理则由 Niven 属于 $\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\}$，逐一对应：$1\Rightarrow n=1$，$-1\Rightarrow n=2$，$\frac{1}{2}\Rightarrow n=6$，$-\frac{1}{2}\Rightarrow n=3$，$0\Rightarrow n=4$。故 $\cos\frac{2\pi}{n}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow n\in\{1,2,3,4,6\}$。（这正是晶体学限制定理的代数内核——平面点阵只允许 1,2,3,4,6 重旋转对称。）■

例 3.3（正切的 Niven 定理） ($\star$) 证明：若 $\theta=r\pi$（$r\in\mathbb{Q}$）且 $\tan\theta\in\mathbb{Q}$，则 $\tan\theta\in\{0,\pm1\}$。

解. 设 $t=\tan\theta\in\mathbb{Q}$，则 $\cos2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}\in\mathbb{Q}$，且 $2\theta=2r\pi$ 仍是 π 的有理倍。由例 3.1，$\cos2\theta\in\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\}$。由 $\frac{1-t^2}{1+t^2}=v$ 解出 $t^2=\frac{1-v}{1+v}$:

$$v=1\Rightarrow t=0;\quad v=0\Rightarrow t=\pm1;\quad v=-1\ (\theta=\pi/2,\ \tan\text{ 无定义});\quad v=\pm1/2\Rightarrow t^2=1/3\ \text{ 或 } 3\ (\text{无理}).$$

故有理的 t 只能是 $0,\pm1$。■

3.3 练习（答案见本讲末）

练习 3.1 证明 $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{4}$ 无理。

练习 3.2 证明 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是代数整数，求其极小多项式，并证它无理。

练习 3.3 ($\star$) 求 $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$ 与 $\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{4\pi}{5}$，并据此写出 $\cos\frac{2\pi}{5}$ 满足的二次方程（其极小多项式）。

第三讲练习答案

3.1 若 $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{4} = r \in \mathbb{Q}$，则 $\cos(r\pi) = \frac{1}{4} \notin \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$，违反 Niven 定理，故无理。

3.2 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是代数整数 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 之和，故为代数整数。设 $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$：$\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$，$(\alpha^2-5)^2 = 24$，得 $\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$。它以四个共轭 $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ 为根、在 $\mathbb{Q}$ 上不可约（无有理根，亦无有理二次因式），故为极小多项式，$\deg = 4 > 1$，α 无理。

3.3 $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$。和 $= -\frac{1}{2}$，积 $= -\frac{1}{4}$。故二者是 $t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0$ 即 $4x^2 + 2x - 1 = 0$ 的两根；这就是 $\cos\frac{2\pi}{5}$ 的极小多项式（次数 2，故 $\cos\frac{2\pi}{5}$ 无理）。

第四讲　复数与平面几何

前三讲把复数 / 三角当作解代数（方程、递推、无理性）的工具；本讲转向复数最直观的化身——把平面上的点写成复数，则**距离是模、转角是辐角、旋转是乘** $e^{i\theta}$。许多需要巧添辅助线的几何题，在复数下化成一行代数。

4.1　理论

(一) 字典 平面上的点用复数表示。$|a-b|$ 是 A, B 间距离；$\arg\frac{c-a}{b-a}$ 是有向角 $\angle BAC$（从射线 AB 转到 AC）；三点共线 $\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$。

(二) 旋转与位似 绕点 p 逆时针转 θ 再以比 r 位似：$z \mapsto p + re^{i\theta}(z-p)$（纯旋转即 $r=1$）。这是复数几何最锋利的工具——"等角、等长、正多边形"都靠它。

(三) 相似与共圆 同向相似 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} = \frac{b'-a'}{c'-a'}$。四点 a, b, c, d 共圆或共线 $\Leftrightarrow$ 交比 $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{R}$。

(四) 正三角形判据 设 $\omega = e^{2\pi i/3}$（$1+\omega+\omega^2 = 0,\ \omega^3 = 1$）。则

$$a, b, c \text{ 成正三角形} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca \Leftrightarrow a+\omega b+\omega^2 c = 0 \text{ 或 } a+\omega^2 b+\omega c = 0,$$

后两式对应两种定向。

> **心法** 几何题转复数后：**旋转** $z \mapsto p + e^{i\theta}(z-p)$ 对付等角、等长、正多边形；**正三角形判据**对付"是否正三角形"；**交比**对付共圆。善用 $1+\omega+\omega^2 = 0,\ \omega^3 = 1$ 化简；$60°$ 旋转常记 $\varepsilon = e^{i\pi/3} = -\omega^2$（$\varepsilon^3 = -1$）。

4.2 例题

例 4.1（正三角形判据） 证明：a,b,c 成正三角形 $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$。

解. 先证因式分解

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$$

（右端展开，用 $\omega+\omega^2=-1,\ \omega^3=1$ 即得）。故左端为 0 当且仅当 $a+\omega b+\omega^2 c=0$ 或 $a+\omega^2 b+\omega c=0$。

再说明 $a+\omega b+\omega^2 c=0$ 即"正三角形（某定向）"：逆时针正三角形 $a\to b\to c$ 等价于把 $b-a$ 绕 a 转 $60°$ 得 $c-a$，即 $c-a=\varepsilon(b-a)$，$\varepsilon=e^{i\pi/3}$。因 $\varepsilon=-\omega^2$，代入并用 $1+\omega+\omega^2=0$ 整理得 $a+\omega b+\omega^2 c=0$；另一转向给出共轭式。于是两式之一成立 $\Leftrightarrow$ 正三角形 $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$。■

例 4.2（Napoleon 定理） 在 $\triangle ABC$ 各边外侧分别作正三角形，其中心为 O_A,O_B,O_C。证明 $\triangle O_AO_BO_C$ 为正三角形。

解. 设 $\varepsilon=e^{i\pi/3}=-\omega^2$（$\varepsilon^3=-1$）。边 BC 外侧正三角形的顶点 $A_1=b+\varepsilon(c-b)$，其中心（三顶点重心）

$$O_A=\frac{b+c+A_1}{3}=\frac{(2-\varepsilon)b+(1+\varepsilon)c}{3},$$

轮换得 $O_B=\frac{(2-\varepsilon)c+(1+\varepsilon)a}{3}$，$O_C=\frac{(2-\varepsilon)a+(1+\varepsilon)b}{3}$。验证 $O_A+\omega^2 O_B+\omega O_C=0$——以 a 的系数为例（用 $\varepsilon=-\omega^2,\ \omega^3=1$）：

$$\frac{1}{3}[\omega^2(1+\varepsilon)+\omega(2-\varepsilon)]=\frac{1}{3}[\omega^2(1-\omega^2)+\omega(2+\omega^2)]=\frac{1}{3}[\omega^2+\omega+1]=0,$$

b,c 的系数同理为 0。由判据，$\triangle O_AO_BO_C$ 为正三角形。■

例 4.3（Ptolemy 不等式） $(\star)$ 证明：对平面上任意四点 A,B,C,D，

$$AC\cdot BD\le AB\cdot CD+BC\cdot AD,$$

等号成立当且仅当 A,B,C,D 顺次共圆。

解. 对任意复数 a,b,c,d 有恒等式

$$(a-c)(b-d)=(a-b)(c-d)+(b-c)(a-d)$$

（两边展开均为 $ab-ad-bc+cd$）。取模并用三角不等式 $|u+v|\le|u|+|v|$：

$$|a-c|\,|b-d|\le|a-b|\,|c-d|+|b-c|\,|a-d|,$$

即 $AC\cdot BD\le AB\cdot CD+BC\cdot AD$。等号当且仅当 $(a-b)(c-d)$ 与 $(b-c)(a-d)$ 辐角相同，即 $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(a-d)}$ 为正实数——恰是 A,B,C,D 顺次共圆的条件。■

4.3　练习（答案见本讲末）

练习 4.1 证明：任意四边形各边中点构成平行四边形（Varignon 定理）。

练习 4.2 设 P 在正三角形 ABC 外接圆的弧 BC（不含 A）上。证明 $PA = PB + PC$。

练习 4.3 ($\star$) 在 $\triangle ABC$ 各边外侧作正三角形，顶点分别为 A', B', C'。证明 $AA' = BB' = CC'$。

第四讲练习答案

4.1 设四边形顶点 a, b, c, d，各边中点 $p = \frac{a+b}{2}, q = \frac{b+c}{2}, r = \frac{c+d}{2}, s = \frac{d+a}{2}$。则 $q - p = \frac{c-a}{2} = r - s$，即一组对边为相等向量，故 $pqrs$ 为平行四边形（其边平行于对角线 AC 且长为其半）。

4.2 P 在弧 BC（不含 A）上时 A, B, P, C 顺次共圆，Ptolemy 取等：$PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB$。因正三角形 $AB = BC = CA$，约去得 $PA = PB + PC$。

4.3 记 $\varepsilon = e^{i\pi/3} = -\omega^2$，外侧正三角形顶点 $A' = b + \varepsilon(c - b)$, $B' = c + \varepsilon(a - c)$, $C' = a + \varepsilon(b - a)$。直接计算（用 $\varepsilon = -\omega^2$, $\omega^3 = 1$）得 $B' - B = \omega^2(A' - A)$, $C' - C = \omega(A' - A)$，即 $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ 是 $\overrightarrow{AA'}$ 旋转 $\pm 120°$ 所得，模长不变，故 $AA' = BB' = CC'$。■

第五讲　Vieta jumping 与二次型递降

前四讲围绕”复数 ↔ 三角”这条主线；本讲独立成章，介绍数论中以小博大的利器**——Vieta jumping（韦达跳跃）**。它专治这样一类问题：一个关于 a, b 对称、且对每个变量都是二次的丢番图条件。把一个变量冻结，方程成为另一变量的二次方程；由韦达定理，“另一个根”也是整数，于是能在解之间**跳跃**。配合**无穷递降 / 极小性**，要么逼出矛盾，要么把解集压到一个基例上。

5.1　理论

设对称丢番图方程对每个变量都二次，典型形如 $a^2 - k\,ab + b^2 = c$（k, c 为与解相关的常数 / 参数）。**五步法：**

1. **定参**。把待定量（商或参数）记作 k，整理成对每个变量二次的形式。
2. **取极小解**。在全体正整数解中取使 $a + b$ 最小的一组，不妨 $a \geq b$。
3. **看作 a 的二次方程**。如 $a^2 - (kb)\,a + (b^2 - c) = 0$，设另一根为 a'，韦达定理给出 $a + a' = kb$, $a\,a' = b^2 - c$。

4. **断 a' 为整数**。由 $a' = kb - a$（两根之和为整数）知 $a' \in \mathbb{Z}$；再由 $a' = \frac{b^2-c}{a}$ 控制其**符号与大小**。
5. **递降或落底**。证 $a' < a$：若 a' 仍为正整数，则 (a', b) 是更小的解，与极小性矛盾；故只能落到 $a' \leq 0$ 等**基例**，由它反解 k（或断定解集）。

心法 见到"对称、各变量二次、且要求整除 / 完全平方"的数论方程，立刻想 Vieta jumping：**冻结一个变量 → 韦达给出另一根 → 极小性 + 递降**。三要素缺一不可——另一根是整数（韦达和）、符号可控（韦达积）、严格变小（递降）。

5.2 例题

例 5.1（IMO 1988 第 6 题） 设正整数 a, b 使 $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 为正整数。证明 k 是完全平方数。

解. 反设 k 不是完全平方数。在方程

$$a^2 + b^2 = k(ab+1), \qquad \text{即} \qquad a^2 - (kb)\,a + (b^2 - k) = 0$$

的全体正整数解中取 $a + b$ 最小者，不妨 $a \geq b \geq 1$。视为 a 的二次方程，另一根 a' 满足

$$a + a' = kb \ (\Rightarrow a' \in \mathbb{Z}), \qquad a\,a' = b^2 - k \ \left(\Rightarrow a' = \frac{b^2-k}{a}\right).$$

- $a' \neq 0$：否则 $b^2 - k = 0$，$k = b^2$ 为完全平方，矛盾。
- $a' < a$：$a' = \frac{b^2-k}{a} < \frac{b^2}{a} \leq \frac{a^2}{a} = a$（用 $b \leq a$）。
- $a' \leq 0$：若 $a' \geq 1$，则 (a', b) 也是正整数解且 $a' + b < a + b$，与极小性矛盾。故 $a' \leq 0$，结合 $a' \neq 0$ 得 $a' < 0$。
- $a' < 0$ **不可能**：把 a' 代回 $a'^2 - kb\,a' + b^2 = k$，左端 $= a'^2 + kb\,|a'| + b^2 \geq 1 + kb + b^2 > k$，矛盾。

四条彼此矛盾，故假设不成立：k 必为完全平方数。■

例 5.2（整除链与 Fibonacci） 设正整数 a, b 使 $ab \mid a^2 + b^2 + 1$。证明 $\frac{a^2+b^2+1}{ab} = 3$。

解. 记 $k = \frac{a^2+b^2+1}{ab}$，则 $a^2 - (kb)\,a + (b^2+1) = 0$。取使 $a + b$ 最小的正整数解，不妨 $a \geq b$。另一根 $a' = kb - a = \frac{b^2+1}{a} > 0$ 为正整数。若 $a > b$，则由 $a \geq b + 1$ 得 $a' = \frac{b^2+1}{a} \leq \frac{b^2+1}{b+1} \leq b < a$（末步 $b^2 + 1 \leq b(b+1)$ 即 $1 \leq b$），于是 (a', b) 更小，矛盾。故极小解必有 $a = b$：代入 $2a^2 + 1 = ka^2$，即 $a^2(k-2) = 1$，得 $a = 1, k = 3$。因此 k 恒为 3。（沿跳跃得到的解 1,1,2,5,13,34, ... 正是奇数下标的 Fibonacci 数。）■

例 5.3（Markov 方程） $(\star)$ 求方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ 的全部正整数解。

解. $(1,1,1)$ 是一组解。设解满足 $x\le y\le z$，固定 x,y，则 z 的另一根

$$z'=3xy-z=\frac{x^2+y^2}{z}$$

仍为正整数，(x,y,z') 也是解（这就是**跳跃**）。注意 $z'<z\Leftrightarrow z^2>x^2+y^2\Leftrightarrow 3xyz>2(x^2+y^2)$：除 $(1,1,1)$ 外此式恒成立（$x\ge 2$ 时由 $x^2+y^2\le 2yz$ 即得；$x=1,\ y\ge 2$ 时化为 $3yz>2+2y^2$，由 $z\ge y$ 得证；$x=y=1$ 时仅 $(1,1,1)$ 与 $(1,1,2)$，后者 $z'=1<2$）。故除基解 $(1,1,1)$ 外，沿最大分量跳跃严格减小 $x+y+z$，无穷递降必终止于 $(1,1,1)$。反之由 $(1,1,1)$ 反复作 $(x,y,z)\mapsto(x,y,3xy-z)$ 即生成全部正整数解（**Markov 三元组**）：

$$(1,1,1)\to(1,1,2)\to(1,2,5)\to(1,5,13),\ (2,5,29),\ldots\ \blacksquare$$

5.3 练习（答案见本讲末）

练习 5.1 设正整数 a,b 满足 $ab>1$ 且 $ab-1\mid a^2+b^2$。求 $\frac{a^2+b^2}{ab-1}$。

练习 5.2 证明：对每个正整数 m，取 $(a,b)=(m,m^3)$ 即得 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$。（与例 5.1 合起来说明：该商恰好取遍所有完全平方数。）

练习 5.3 $(\star)$ 求所有正整数 k，使方程 $x^2+y^2+z^2=k\,xyz$ 有正整数解。

第五讲练习答案

5.1（值为 5） 记 $k=\frac{a^2+b^2}{ab-1}$，得 $a^2-(kb)\,a+(b^2+k)=0$。取 $a+b$ 最小的解，不妨 $a\ge b$；另一根 $a'=kb-a=\frac{b^2+k}{a}$ 为正整数。若 $a>b\ge 2$，则

$$(a+b)(ab-1)-(a^2+b^2)=a^2(b-1)+b^2(a-1)-(a+b)>0,$$

故 $k<a+b\le a^2-b^2$（末步用 $a>b$），即 $a'=\frac{b^2+k}{a}<a$，与极小性矛盾；又 $a=b$ 时 $a^2-1\mid 2a^2$ 给出 $a^2-1\mid 2$，无解。故 $b=1$，由 $a-1\mid a^2+1=(a-1)(a+1)+2$ 得 $a-1\mid 2$，$a\in\{2,3\}$，两者均给 $k=5$。

5.2 直接计算：$\frac{m^2+m^6}{m\cdot m^3+1}=\frac{m^2(1+m^4)}{1+m^4}=m^2$。故每个完全平方 m^2 都被取到；结合例 5.1（该商只能是完全平方），可知 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 的取值恰为全体完全平方数。

5.3（$k\in\{1,3\}$） 取分量和最小的正整数解 $x\le y\le z$。固定 x,y，另一根 $z'=\frac{x^2+y^2}{z}$ 为正整数解；极小性（z 为最大分量）迫使 $z'\ge z$，即 $z^2\le x^2+y^2\le 2y^2$，故 $z\le\sqrt{2}\,y$。又 $k\,xyz=x^2+y^2+z^2\le 3z^2$ 给出 $k\,xy\le 3z\le 3\sqrt{2}\,y$，即 $k\,x\le 4$，故 $k\le 4$。

再排除偶数 k：在所有"偶 k + 正整数解"中取 $x+y+z$ 最小者。平方数模 4 属 $\{0,1\}$；若 x,y,z 恰两奇一偶，则左端 $\equiv 2 \pmod 4$，而右端 $k\,xyz$ 含偶因子 k 与偶分量，$\equiv 0 \pmod 4$，矛盾；故 x,y,z 全偶，令 $x=2x_1$ 等得 $x_1^2+y_1^2+z_1^2=2k\,x_1y_1z_1$（参数 $2k$ 仍偶）且更小，与极小性矛盾。故 k 为奇数。

结合 $k\le 4$ 得 $k\in\{1,3\}$，分别由 $(3,3,3)$、$(1,1,1)$ 实现。■

全册结语

五讲到此收束。回看脉络：第一讲用 $x=2\cos\theta$ 与 Chebyshev 把多项式方程塌缩成倍角等式，立起"复数 ↔ 三角"这把总钥匙；第二讲用同一种换元把非线性 / 分式递推线性化，化作指标翻倍或角度平移；第三讲深入这些三角值的算术本性——代数整数与极小多项式，回答"为何它们满足整系数方程、何时有理"；第四讲把复数从代数推向几何，旋转即乘 $e^{i\theta}$，正三角形判据与交比让综合题化为一行。前四讲共用一条主线：**把"角度 / 旋转"翻译成"乘一个单位复数"**。第五讲独立成章，Vieta jumping 与无穷递降展示纯数论里"以小博大"的另一种力量——冻结、跳跃、递降。

愿这五把工具——**倍角塌缩、换元线性化、极小多项式、复数几何、韦达递降**——在你的二试 / CMO 之路上各显其用。